

# 在小波域中进行图像噪声方差估计的 EM 方法\*

林哲民 康学雷 张立明

(复旦大学电子工程系工控实验室, 上海, 200433)

**摘要** 提出一种估计图像噪声的方法, 该方法用混合高斯概率密度模型拟合图像的小波系数中最高频率子带的直方图, 用 EM 算法估计模型的参数, 选取其中最小的标准方差作为图像噪声标准方差, 用该方法能准确地估计图像高斯噪声的标准方差, 尤其当图像的噪声比较弱时, 该方法比传统方法更准确。

**关键词** 小波变换, 混合高斯模型, 期望最大似然函数算法 (EM 算法)。

## EM ALGORITHM FOR ESTIMATING THE NOISE DEVIATION OF THE IMAGE IN THE WAVELET DOMAIN\*

LIN Zhe-Min KANG Xue-Lei ZHANG Li-Ming

(Laboratory of Electronics and Engineering, Fudan University, Shanghai 200433, China)

**Abstract** A new method was proposed to estimate noisy image's quality. This approach uses Gaussian mixture model to simulate the histogram of the highest subband's coefficients in the wavelet domain. The parameters of this model can be calculated by EM algorithm. The smallest deviation of the Gaussian mixture model is selected as the noise deviation. The authors' proposed method can provide better result than the other traditional ones.

**Key words** wavelet transform, gaussian mixture model, Expectation-Maximization (EM).

### 引言

一幅图像的质量常用峰值信噪比 (PSNR) 来表示, 即

$$\text{PSNR} = 10 \log \frac{255^2}{E\{[O(i,j) - N(i,j)]^2\}}$$

其中  $O$  表示无噪声图像,  $N$  表示受噪声污染的图像。当噪声是与图像无关的零均值白噪声时, PSNR 可写成

$$\text{PSNR} = 10 \log \frac{255^2}{\sigma_n^2}$$

其中  $\sigma_n$  是噪声的标准方差, 但是  $\sigma_n$  常常是未知的, 这时对图像 PSNR 的估计称为盲估计, 它等价于对噪声标准方差的估计。常用图像噪声标准方差的估计方法有: 将噪声污染的图像减去滤波去噪后的图像, 由该信号来估计噪声, 这要求所使用的滤波器不仅要能够有效地去除噪声而且要尽可能保留图像的细节; 将噪声污染的图像分成几个部分, 对每部分估计噪声标准方差, 然后用某种方法选择其中一个比

较正确的值来估计实际噪声标准方差<sup>[10]</sup>; 利用图像的某些统计特性来估计噪声标准方差<sup>[11]</sup>。采用小波变换的特点来估计图像噪声的标准方差是一种相对较好的方法, 因为小波变换后, 图像的能量主要集中在尺度大的子带, 而尺度小的高频子带系数的幅度较小能量较低, 因此, 当噪声较大时, 可将最高频率子带的系数看成全部是噪声, 由此来估计噪声的标准方差。Donoho 和 Johnstone 提出<sup>[4]</sup>在小波域中噪声标准方差的估计公式  $\hat{\sigma}_n = \text{MAD}/0.6745$ , 由此来估计噪声标准方差, 其中 MAD 是 HH 子带小波系数幅度的中值。这些方法都能够有效地估计出噪声的标准方差, 但是当图像噪声较小时, 以上提到的方法都不能正确地估计出噪声的标准方差<sup>[1,11]</sup>。

本文提出一种新的图像噪声标准方差估计方法, 该方法源于数码相机研制开发, 在工作中, 有时要通过拍摄的图像评估相机的质量, 其中有一项重要的指标是图像噪声的方差, 在大多数实际情况下图像的质量是较高的, 即噪声标准方差较小, 用传统

\* 国家自然科学基金 (编号 39870194) 资助项目  
稿件收到日期 2000-06-04, 修改稿收到日期 2000-09-05

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 39870194)  
Received 2000-06-04, revised 2000-09-05

的方法不能对它进行有效地估计. 本文建议的方法是用混合高斯模型来逼近小波系数的直方图, 利用 EM 算法估计出模型的参数, 通过考察噪声对模型参数的影响, 可以得到噪声标准方差的简单估计. 计算机模拟结果表明本文建议的方法能够比较正确地估计出图像中的噪声标准方差, 从而得到比较好的图像质量评价的客观数据.

## 1 图像各子带小波系数的统计模型和 EM 算法

### 1.1 图像各子带小波系数的统计模型

对图像进行二维小波变换可以分别对行和列进行一维小波变换<sup>[1-3]</sup>. 经过一次小波变换后得到 4 个子带系统: LL、LH、HL 和 HH, 其中 L、H 分别表示低通、高通滤波, LH 表示在 X 方向进行低通滤波在 Y 方向进行高通滤波.

小波系数的 HH 部分表现为 X、Y 方向所经过高通滤波得到的二维高频小波系数  $d_k, k=1, 2, \dots$  total =  $[M/2] \times [N/2]$ , 其中  $M, N$  分别是图像的宽和长. 很明显, 噪声和图像的边缘细节包含在这些系数当中. 对于大多数视觉图像各子带小波系数的统计特性可以用 GL (Generalized Laplasian) 密度函数表示<sup>[4]</sup>, 由此可见图像的小波系数的均值趋近于零, 而且各子带小波系数的直方图大致是以零为中心对称, 并且当系数幅度变大时, 相应的概率密度单调减小. 利用这一性质, 我们把它的概率密度函数用混合高斯模型近似, 选用  $M$  个加权高斯函数近似子带中心小波系数的直方图, 如式(1):

$$P_d(d; \Phi) = \sum_{i=1}^M \omega_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-d^2/2\sigma_i^2} \quad (1)$$

其中  $\Phi = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_M, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M\}$ ,  $\omega_i$  是加权系数并且  $\sum_{i=1}^M \omega_i = 1, \omega_i > 0, i=1, \dots, M$ . 为了方便起见, 标准方差  $\sigma_i$  是按照从小到大排列的, 即  $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_M$ . 图 1 给出噪声污染的 Lena 图像 HH 子带的直方图和混合高斯模型的拟合图, 混合模型的参数  $\varphi = \{0.7631, 0.1815, 0.0553, 8.1014, 11.5865, 19.5852\}$ ,  $M=3$ . 模型中参数  $\Phi$  的估计将在下一节讨论, 先讨论最合适的取值.

对式(1)分别选  $M=1, 2, 3, 4, 5$  项, 用 EM 算法估计  $\Phi$ , 对得到的概率密度与实际直方图进行比较, 用拟合的概率密度函数与实际直方图之间的相关熵来表示两者之间的拟合程度, 相关熵定义为

$$\Delta H = - \sum_{n=1}^{256} h_n \log_2 \frac{\bar{P}_d(d_n; \Phi)}{h_n} \quad (2)$$

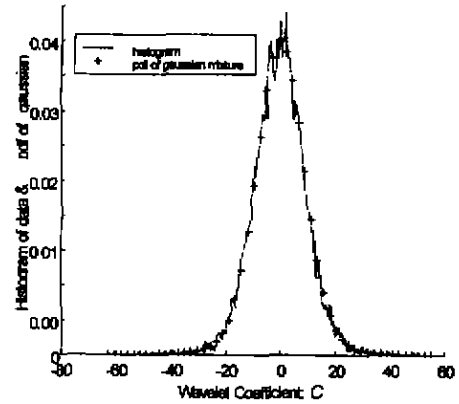


图 1 加了标准方差为  $\delta$  高斯白噪声的 Lena 图像 HH 子带直方图和混合高斯模型的拟合结果  
Fig. 1 Histogram and Gaussian mixture simulation of the HH subband of noisy Lena image

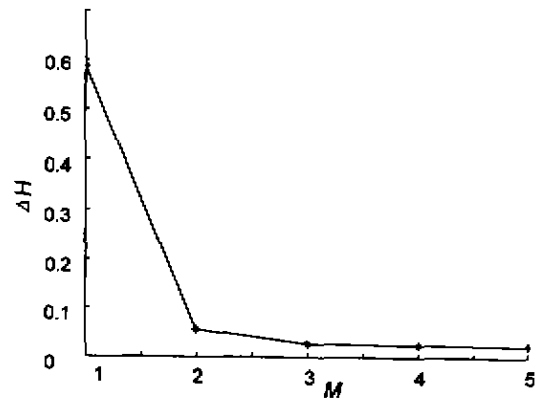


图 2 相关熵和  $M$  的关系  
Fig. 2 The average relative entropy vs component number  $M$

计算时将直方图分成 256 个区间,  $h_n$  是实际第  $n$  个区间中的概率,  $\bar{P}_d(d_n; \Phi)$  是拟合的概率密度函数在第  $n$  个区间的积分. 相关熵越小意味着拟合程度越好, 当两者完全拟合时相关熵为零.

对所选用的 10 幅图像的最高频率 HH 子带相关熵的均值同选用项数  $M$  的关系如图 2 所示, 可以看到, 仅仅选用 1 项不能很好地拟合小波系数的直方图, 选 3 项可以很好地近似, 选择 4 项或 4 项以上并无更好的改善. 实际应用中选用 3 项就足够了, 这与文献[5]和[6]的结果一致.

### 1.2 EM 算法<sup>[4]</sup>对混合高斯模型的参数估计

假设图像子带的每一个小波系数是独立的、同分布的随机变量, 其密度函数  $P_d(d; \Phi)$  由式(1)给出, 其联合概率密度函数为

$$g(d_1, d_2, \dots, d_{total}; \Phi) = \prod_{i=1}^M \left[ \sum_{j=1}^M \omega_j \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} e^{-d_i^2/2\sigma_j^2} \right] \quad (3)$$

参数  $\Phi$  可以用最大似然法(MLE)进行估计,即

$$\Phi^* = \arg \max_{\Phi} \ln[g(d_1, d_2, \dots, d_{total} | \Phi)]. \quad (4)$$

由于  $P_d(d; \Phi)$  是几项之和,所以直接求  $\Phi^*$  比较困难.我们假设式(1)中的系数是由多个高斯信号源产生并且按一定的概率密度混合成的,如果知道每个系数的数值和它由哪个高斯源产生的,那么模型的参数就很容易估计.将这些完整的数据纪录记为  $t_k(d_k, Z_k)$ , 其中  $Z_k$  是一个  $M$  维矢量,用以纪录  $d_k$  由哪个高斯源产生.假设每个完整的数据纪录是相互独立的随机变量,这样它们的似然函数可以由

$$\begin{aligned} L_0 &= \ln[g(t_1, t_2, \dots, t_{total} | \Phi)] \\ &= \ln \left\{ \prod_{i=1}^{total} \prod_{j=1}^M \omega_j^{z_{ij}} [P_i(d_i, \sigma_i)] \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

给出,其中  $z_{ij}$  是  $Z_i$  的分量,  $z_{ij} \in \{0, 1\}$ .

但是实际上得到的数据不是完整的,所以求出使  $L_0$  最大化参数  $\Phi^*$  很困难,为了克服这一难点,不求使  $L_0$  最大的参数  $\Phi^*$ ,而是求使  $L_0$  期望值最大参数,这就是EM算法的主要目的.对于混合概率密度问题中的参数估计,EM算法十分有效,它具有较可靠的全局收敛性质、较少的迭代次数、较少的存储量和易于编程实现等特点.EM算法是一种迭代算法,它分成两个步骤(这里设  $\Phi$  是当前值,  $\Phi^+$  表示下一步估计值):

E步骤: 计算  $Q(\Phi, \Phi^+) = E[\ln(g(t_1, t_2, \dots, t_{total} | \Phi^+)) | d, \Phi]$ ;

M步骤: 计算  $\Phi^+ = \arg \max_{\Phi} Q(\Phi, \Phi^+)$ .

重复上面两个步骤直到  $\|\Phi^+ - \Phi\| < \epsilon$  ( $\epsilon$  是事先设定好的小的正数).对于后文中式(8)的混合高斯模型,EM算法按以下步骤:(1)先给出任意初值  $\Phi = \{\omega(0)_1, \omega(0)_2, \dots, \omega(0)_M, \sigma_1(0), \sigma_2(0), \dots, \sigma_M(0)\}$ ,  $\epsilon > 0$ ;(2)按照公式(6)和(7)<sup>[4]</sup>计算  $\Phi^+$ :

$$\sigma_i^{+i} = \left\{ \frac{\sum_k d_k^2 \omega_k P_i(d_k; \sigma_i)}{P_d(d_k; \Phi)} \right\} / \left\{ \frac{\sum_k d_k^2 \omega_k P_i(d_k; \sigma_i)}{P_d(d_k; \Phi)} \right\}, \quad (6)$$

$$\omega_i^+ = \frac{1}{total} \sum_k d_k^2 \frac{\omega_k P_i(d_k; \sigma_i)}{P_d(d_k; \Phi)}. \quad (7)$$

其中  $P_i(d; \sigma_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-d^2/2\sigma_i^2}$ ; (3) 如果  $\|\Phi^+ - \Phi\| < \epsilon$ , 迭代结束,否则  $\Phi_i = \Phi_i^+$ , 重复步骤(2).

## 2 噪声估计

图像噪声的来源很多,噪声形式也有很多<sup>[7]</sup>.为简便起见,假设图像受到均值为零的高斯白噪声污染.高斯白噪声经过正交小波分解后它的小波系数

仍然是高斯分布,且标准方差不变,因此受噪声污染图像的小波系数可写成  $y = d + n$ , 其中:  $d$  满足混合高斯分布  $P_d(d; \Phi)$ ,  $n$  满足高斯分布  $N(0, \sigma_n)$ ,  $\sigma_n$  是噪声标准方差.因此  $y$  的概率密度函数应当满足

$$\begin{aligned} P_y(y) &= \int P_d(d; \Phi) P_n(y - d) dd \\ &= \int \sum_{i=1}^M \omega_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-(y-d)^2/2\sigma_i^2} dd \\ &= \int \sum_{i=1}^M \omega_i \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-d^2/2\sigma_i^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-(y-d)^2/2\sigma_n^2} dd. \end{aligned}$$

因为

$$\int \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-d^2/2\sigma_i^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-(y-d)^2/2\sigma_n^2} dd = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_i^2 + \sigma_n^2)}} e^{-y^2/2(\sigma_i^2 + \sigma_n^2)},$$

所以

$$P_y(y) = \sum_{i=1}^M \omega_i \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_i^2 + \sigma_n^2)}} e^{-y^2/2(\sigma_i^2 + \sigma_n^2)} \quad (8)$$

其中  $\sigma_i'^2 = \sigma_i^2 + \sigma_n^2$ .

由此可见,受噪声污染的小波系数的混合模型中的参数只是将式(1)中的  $\sigma_i$  变成  $\sigma_i'^2 = \sigma_i^2 + \sigma_n^2$  即可.当  $\sigma_n \geq \sigma_i$  时,  $\sigma_i'$  很接近  $\sigma_n$ , 因此可将整个 HH 子带都认为是噪声;而当  $\sigma_n \ll \sigma_i$  时,根据模型分析,最小的  $\sigma_i'$  最能够精确估计噪声的  $\sigma_n$ .因此,我们利用图像小波变换的 HH 子带,用模型(1)近似表示该子带的直方图,通过式(6)和(7)估计模型中的参数,采用最小的  $\sigma_i'$  来估计噪声的标准方差是合理的.

## 3 试验结果

文章选用了 10 幅  $256 \times 256$ , 8 比特图像,人为地加入标准方差不同的高斯白噪声,对本文建议的方法和其他小波域中噪声估计的方法进行比较,如表 1 所示.表中方法二是 Donoho 和 Johnstone 提出<sup>[8]</sup>的方法,方法三是直接用 HH 子带的标准方差估计噪声标准方差,表中  $\sigma_n$  是实际噪声标准方差,  $\hat{\sigma}_n$  是估计的噪声标准方差,  $std(\hat{\sigma}_n)$  是 10 幅图像噪声标准方差估计值的标准方差.由表 1 可以看到,当实际加入噪声标准方差逐渐增大,估计的准确度越高,本文建议的方法优于其它两种方法.事实上,方法二和三只是用单个高斯密度函数近似小波系数的分布函数,并假设图象的 HH 子带均为噪声,这种假设在图像比较光滑并且噪声强度较大的情况下是能够满足的,但在噪声较弱时,图像的边缘在其细节部分占了很大的比重,因此方法二和三不能准确估计噪声的标准方差.本方法不仅对均值为零的高斯白噪声而且对均值为零均匀分布的白噪声也能较准确地估计,如表 2 所示.

表1 图像加的零均值高斯白噪声  
Table 1 The results of added white Gaussian noise

$\sigma_n$	本文建议方法		方法二		方法三	
	$\hat{\sigma}_n$	$std(\hat{\sigma}_n)$	$\hat{\sigma}_n$	$std(\hat{\sigma}_n)$	$\hat{\sigma}_n$	$std(\hat{\sigma}_n)$
0	1.914	1.7134	2.8043	2.2779	5.3760	3.1544
2	3.1229	1.3577	3.9623	1.8907	5.8698	2.8839
4	4.7948	1.1846	5.6440	1.5917	6.9354	2.4489
8	6.5120	0.8567	9.2921	1.2703	9.9321	.7919
12	16.1634	0.5844	16.3489	0.8834	17.1145	1.1094

表2 图像加的零均值均匀分布的白噪声  
Table 2 The results of added uniform noise

$\sigma_n$	本文建议方法		方法二		方法三	
	$\hat{\sigma}_n$	$std(\hat{\sigma}_n)$	$\hat{\sigma}_n$	$std(\hat{\sigma}_n)$	$\hat{\sigma}_n$	$std(\hat{\sigma}_n)$
0	3.0501	2.3856	4.8535	3.6118	11.1970	4.9369
2	4.2245	1.9167	5.7817	3.1898	11.3949	4.8614
4	5.8746	1.5753	7.4117	2.8269	11.9862	4.6602
8	9.5864	1.3950	11.0349	2.4255	14.0106	4.0875
12	17.2909	1.2220	18.7871	2.0366	19.9357	3.0607
16	17.2909	1.2220	18.7871	2.0366	19.9357	3.0607

表3 受噪声污染的Lena图像质量估计  
Table 3 Estimation results of noisy image quality

实际值	本文建议方法		方法二		方法三	
	PSNR	$\hat{\sigma}_n$	PSNR	$\hat{\sigma}_n$	PSNR	$\hat{\sigma}_n$
4.01	36.1	4.75	34.6	5.55	33.2	8.20
16.07	24.0	15.8	24.15	16.92	23.5	17.5

利用噪声估计盲估来估计图像的质量,结果如表3所示.对加了标准方差为4和标准方差为16的高斯白噪声的Lena图像,用3种不同方法估计噪声的标准方差和图像的PSNR,本文建议的方法能够得到较好的图像质量盲估计.

#### 4 结论

本文建议的方法能够对图像噪声的标准方差进行较为准确的估计,与常用的方法比较,它并不需要全部了解图像的内容,只要有HH子带的统计特性就可以进行噪声估计,尤其当噪声的强度较小时,该方法比传统的方法更能准确地估计噪声的标准方差,并且有算法简单易于实现等优点.

#### REFERENCES

- [1]Olsen S I. Estimation of noise in images: an evaluation. *CVGIP: Graphic Models and Image Processing*, 1993, **55** (4): 319—323
- [2]Daubechies I. *Ten Lectures on Wavelets*. Philadelphia, PA: SIAM, 1992
- [3]Mallat S G. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Trans. Pat-*
- tern Anal. Machine Intell.*, 1989, **11**: 674—693
- [4]Rendder R A, Walker H F. Mixture densities, maximum likelihood and the EM algorithm. *SIAM Review*, 1984, **26**: 195—239
- [5]Vastola K. Threshold detection in narrow-band non-Gaussian noise. *IEEE Transaction on Communication*, 1984, **COM-32**(32)
- [6]Shanmugan K S, Breipohl A M. *Random Signals, Detection, Estimation and Data Analysis*. New York: John Wiley & Sons, 1988
- [7]Boie R A, Cox I J. An analysis of camera noise. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 1992, **14**(6): 671—674
- [8]Donoho D L, Johnstone I M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. *Biometrika*, 1994, **81**: 425—455
- [9]Liporace L A. Maximum likelihood estimation for multivariate observations of Markov source. *IEEE Trans. Information Theory*, 1982, **IT-28**(5): 729—734
- [10]Meer P, Jolion J, Rosenfeld A. A fast parallel algorithm for blind estimation of noise variance. *IEEE Trans. Pattern Aach. Intelligence*, 1990, **12**(2): 216—223
- [11]Zhang Z, Blum Rick S. On estimating the quality of noisy images. *IEEE International Conference on Acoustic Speech and Signal Processing*, 1998, **5**: 2897—2900